

REFLEXIONA Y RESUELVE

Concepto de primitiva

■ NÚMEROS Y POTENCIAS SENCILLAS

① a) $\int 1 \, dx$ b) $\int 2 \, dx$ c) $\int \sqrt{2} \, dx$

② a) $\int 2x \, dx$ b) $\int x \, dx$ c) $\int 3x \, dx$

③ a) $\int 7x \, dx$ b) $\int \frac{x}{3} \, dx$ c) $\int \sqrt{2}x \, dx$

④ a) $\int 3x^2 \, dx$ b) $\int x^2 \, dx$ c) $\int 2x^2 \, dx$

⑤ a) $\int 6x^5 \, dx$ b) $\int x^5 \, dx$ c) $\int 3x^5 \, dx$

■ POTENCIAS DE EXPONENTE ENTERO

⑥ a) $\int (-1)x^{-2} \, dx$

b) $\int x^{-2} \, dx$

c) $\int \frac{5}{x^2} \, dx$

⑦ a) $\int \frac{1}{x^3} \, dx =$

b) $\int \frac{2}{x^3} \, dx$

$$\textcircled{8} \text{ a) } \int \frac{1}{(x-3)^3} dx$$

$$\text{b) } \int \frac{5}{(x-3)^3} dx$$

■ LAS RAÍCES TAMBIÉN SON POTENCIAS

$$\textcircled{9} \text{ a) } \int \frac{3}{2} x^{1/2} dx$$

$$\text{b) } \int \frac{3}{2} \sqrt{x} dx$$

$$\textcircled{10} \text{ a) } \int \sqrt{x} dx$$

$$\text{b) } \int 7\sqrt{x} dx$$

$$\textcircled{11} \text{ a) } \int \sqrt{3x} dx$$

$$\text{b) } \int \frac{\sqrt{2x}}{5} dx$$

$$\textcircled{12} \text{ a) } \int \frac{1}{2} x^{-1/2} dx$$

$$\text{b) } \int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$$

$$\textcircled{13} \text{ a) } \int \frac{3}{2\sqrt{x}} dx$$

$$\text{b) } \int 5\sqrt{x^3} dx$$

$$\textcircled{14} \text{ a) } \int \frac{3}{\sqrt{5x}} dx =$$

$$\text{b) } \int \sqrt{7x^3} dx$$

■ ¿RECUERDAS QUE $D(\ln x) = 1/x$?

$$\textcircled{15} \text{ a) } \int \frac{1}{x} dx$$

$$\text{b) } \int \frac{1}{5x} dx$$

$$\textcircled{16} \text{ a) } \int \frac{1}{x+5} dx$$

$$\text{b) } \int \frac{3}{2x+6} dx \quad \int$$

■ ALGUNAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

$$\textcircled{17} \text{ a) } \int \cos x dx$$

$$\text{b) } \int 2 \cos x dx$$

$$\textcircled{18} \text{ a) } \int \cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right) dx$$

$$\text{b) } \int \cos 2x dx$$

$$\textcircled{19} \text{ a) } \int (-\text{sen } x) dx$$

$$\text{b) } \int \text{sen } x dx$$

$$\textcircled{20} \text{ a) } \int \text{sen}(x - \pi) dx$$

$$\text{b) } \int \text{sen } 2x dx$$

$$\textcircled{21} \text{ a) } \int (1 + \text{tg}^2 2x) dx$$

$$\text{b) } \int \text{tg}^2 2x dx$$

■ ALGUNAS EXPONENCIALES

$$\textcircled{22} \text{ a) } \int e^x dx$$

$$\text{b) } \int e^{x+1} dx$$

$$\textcircled{23} \text{ a) } \int e^{2x} dx$$

$$\text{b) } \int e^{2x+1} dx$$

1. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int 7x^4 dx$

c) $\int \frac{x^4 - 5x^2 + 3x - 4}{x} dx$

e) $\int \frac{x^4 - 5x^2 + 3x - 4}{x + 1} dx$

g) $\int \frac{7x^4 - 5x^2 + 3x - 4}{x^2} dx$

i) $\int \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt{5x^3}}{3x} dx$

b) $\int \frac{1}{x^2} dx$

d) $\int \frac{x^3}{x - 2} dx$

f) $\int \sqrt{x} dx$

h) $\int \sqrt[3]{5x^2} dx$

j) $\int \frac{\sqrt{5x^3}}{\sqrt[3]{3x}} dx$

2. a) $\int (3x - 5 \operatorname{tg} x) dx$

b) $\int (5 \cos x + 3^x) dx$

c) $\int (3 \operatorname{tg} x - 5 \cos x) dx$

d) $\int (10^x - 5^x) dx$

3. a) $\int \frac{3}{x^2 + 1} dx$

b) $\int \frac{2x}{x^2 + 1} dx$

c) $\int \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} dx$

d) $\int \frac{(x + 1)^2}{x^2 + 1} dx$

1. Calcula:

a) $\int \cos^4 x \operatorname{sen} x \, dx$

b) $\int 2^{\operatorname{sen} x} \cos x \, dx$

2. Calcula:

a) $\int \operatorname{cotg} x \, dx$

b) $\int \frac{5x}{x^4 + 1} \, dx$

1. Calcula: $\int x \operatorname{sen} x \, dx$

2. Calcula: $\int x \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \, dx$

3. Calcula: $\int x^4 e^x dx$

4. Calcula: $\int \operatorname{sen}^2 x dx$

1. Calcula: $\int \frac{3x^2 - 5x + 1}{x - 4} dx$

2. Calcula: $\int \frac{3x^2 - 5x + 1}{2x + 1} dx$

3. Calcula:

a) $\int \frac{5x - 3}{x^3 - x} dx$

b) $\int \frac{x^2 - 2x + 6}{(x - 1)^3} dx$

4. Calcula:

a) $\int \frac{x^3 + 22x^2 - 12x + 8}{x^4 - 4x^2} dx$

b) $\int \frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 8x} dx$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Integrales casi inmediatas

1 Calcula las siguientes integrales inmediatas:

a) $\int (4x^2 - 5x + 7) dx$

b) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$

c) $\int \frac{1}{2x + 7} dx$

d) $\int (x - \operatorname{sen} x) dx$

2 Resuelve estas integrales:

a) $\int (x^2 + 4x)(x^2 - 1) dx$

b) $\int (x - 1)^3 dx$

c) $\int \sqrt{3x} dx$

d) $\int (\operatorname{sen} x + e^x) dx$

s3 Calcula las integrales siguientes:

a) $\int \sqrt[3]{\frac{x}{2}} dx$

b) $\int \text{sen}(x - 4) dx$

c) $\int \frac{7}{\cos^2 x} dx$

d) $\int (e^x + 3e^{-x}) dx$

s4 Halla estas integrales:

a) $\int \frac{2}{x} dx$

b) $\int \frac{dx}{x-1}$

c) $\int \frac{x + \sqrt{x}}{x^2} dx$

d) $\int \frac{3}{1+x^2} dx$

5 Resuelve las siguientes integrales:

a) $\int \frac{dx}{x-4}$

b) $\int \frac{dx}{(x-4)^2}$

c) $\int (x-4)^2 dx$

d) $\int \frac{dx}{(x-4)^3}$

6 Halla las siguientes integrales del tipo exponencial:

a) $\int e^{x-4} dx$

b) $\int e^{-2x+9} dx$

c) $\int e^{5x} dx$

d) $\int (3^x - x^3) dx$

7 Resuelve las siguientes integrales del tipo arco tangente:

a) $\int \frac{2 dx}{1+9x^2}$

b) $\int \frac{5 dx}{4x^2+1}$

c) $\int \frac{4 dx}{3+3x^2}$

d) $\int \frac{dx}{4+x^2}$

8 Expresa el integrando de las siguientes integrales de la forma:

$$\frac{\text{dividendo}}{\text{divisor}} = \text{cociente} + \frac{\text{resto}}{\text{divisor}}$$

y resuélvelas:

a) $\int \frac{x^2 - 5x + 4}{x+1} dx$

b) $\int \frac{2x^2 + 2x + 4}{x+1} dx$

c) $\int \frac{x^3 - 3x^2 + x - 1}{x-2} dx$

9 Halla estas integrales sabiendo que son del tipo arco seno:

$$\text{a) } \int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}} \quad \text{b) } \int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} \quad \text{c) } \int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx \quad \text{d) } \int \frac{dx}{\sqrt{1-(\ln x)^2}} (*)$$

Integrales de la forma $\int f(x)^n \cdot f'(x) dx$

10 Resuelve las integrales siguientes:

$$\text{a) } \int \cos x \operatorname{sen}^3 x dx \quad \text{b) } \int \frac{3}{(x+1)^2} dx$$

$$\text{c) } \int \frac{x dx}{(x^2+3)^5} \quad \text{d) } \int \frac{1}{x} \ln^3 x dx$$

11 Resuelve las siguientes integrales:

a) $\int \text{sen } x \cos x \, dx$

b) $\int \frac{\text{sen } x \, dx}{\cos^5 x}$

c) $\int \frac{2x \, dx}{\sqrt{9 - x^2}}$

d) $\int \frac{x \, dx}{\sqrt{x^2 + 5}}$

12 Resuelve las siguientes integrales:

a) $\int \sqrt{x^2 - 2x} (x - 1) \, dx$

b) $\int \frac{\text{arc sen } x}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx$

c) $\int \frac{(1 + \ln x)^2}{x} \, dx$

d) $\int \sqrt{(1 + \cos x)^3} \text{sen } x \, dx$

Integración por partes

s13 Aplica la integración por partes para resolver las siguientes integrales:

a) $\int x \ln x \, dx$

b) $\int x e^{2x} \, dx$

c) $\int 3x \cos x \, dx$

d) $\int \ln(2x - 1) \, dx$

e) $\int \frac{x}{e^x} \, dx$

f) $\int \operatorname{arc\,tg} x \, dx$

g) $\int \operatorname{arc\,cos} x \, dx$

h) $\int x^2 \ln x \, dx$

14 Resuelve las siguientes integrales aplicando dos veces la integración por partes:

a) $\int x^2 \operatorname{sen} x \, dx$

b) $\int x^2 e^{2x} \, dx$

c) $\int e^x \operatorname{sen} x \, dx$

d) $\int (x + 1)^2 e^x \, dx$

Integrales racionales

15 Aplica la descomposición en fracciones simples para resolver las siguientes integrales:

a) $\int \frac{1}{x^2 + x - 6} dx$

b) $\int \frac{3x^3}{x^2 - 4} dx$

c) $\int \frac{1}{x^3 - 4x^2 - 25x + 100} dx$

d) $\int \frac{x^2 + 1}{x^2 + x} dx$

e) $\int \frac{4}{x^2 + x - 2} dx$

f) $\int \frac{x^2}{x^2 + 4x + 3} dx$

g) $\int \frac{x^3 - 2x^2 + x - 1}{x^2 - 3x + 2} dx$

h) $\int \frac{-16}{x^2 - 2x - 15} dx$

16 Resuelve las siguientes integrales:

a) $\int \frac{2x - 4}{(x - 1)^2 (x + 3)} dx$

b) $\int \frac{2x + 3}{(x - 2)(x + 5)} dx$

c) $\int \frac{1}{(x - 1)(x + 3)^2} dx$

d) $\int \frac{3x - 2}{x^2 - 4} dx$

PARA RESOLVER

17 Resuelve las siguientes integrales:

a) $\int x^4 e^{x^5} dx$ b) $\int x \operatorname{sen} x^2 dx$ c) $\int \sqrt{(x+3)^5} dx$ d) $\int \frac{-3x}{2-6x^2} dx$

18 Resuelve estas integrales:

a) $\int x \cdot 2^{-x} dx$ b) $\int x^3 \operatorname{sen} x dx$ c) $\int e^x \cos x dx$ d) $\int x^5 e^{-x^3} dx$

19 Calcula las integrales racionales siguientes:

a) $\int \frac{x+2}{x^2+1} dx$

b) $\int \frac{1}{(x^2-1)^2} dx$

c) $\int \frac{2x^2+7x-1}{x^3+x^2-x-1} dx$

d) $\int \frac{2x^2+5x-1}{x^3+x^2-2x} dx$

20 Para resolver la integral $\int \cos^3 x \, dx$, hacemos:

$$\begin{aligned}\cos^3 x &= \cos x \cos^2 x = \cos x(1 - \operatorname{sen}^2 x) = \\ &= \cos x - \cos x \operatorname{sen}^2 x\end{aligned}$$

Así, la descomponemos en dos integrales inmediatas. Calcúlala.

Resuelve, después, $\int \operatorname{sen}^3 x \, dx$.

s21 Calcula:

a) $\int \frac{dx}{x^2 - x - 2}$

b) $\int \frac{x^4 + 2x - 6}{x^3 + x^2 - 2x} dx$

c) $\int \frac{5x^2}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} dx$

d) $\int \frac{2x - 3}{x^3 - 2x^2 - 9x + 18} dx$

22 Resuelve las integrales siguientes:

a) $\int \frac{\ln x}{x} dx$

b) $\int \frac{1 - \operatorname{sen} x}{x + \cos x} dx$

c) $\int \frac{1}{x \ln x} dx$

d) $\int \frac{1 + e^x}{e^x + x} dx$

e) $\int \frac{\operatorname{sen}(1/x)}{x^2} dx$

f) $\int \frac{2x - 3}{x + 2} dx$

g) $\int \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{1 + x^2} dx$

h) $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^4 x} dx$

23 Calcula las integrales indefinidas:

a) $\int \frac{\text{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

b) $\int \ln(x-3) dx$

c) $\int \frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

d) $\int \ln(x^2+1) dx$

e) $\int (\ln x)^2 dx$

f) $\int e^x \cos e^x dx$

g) $\int \frac{1}{1-x^2} dx$

h) $\int \frac{(1-x)^2}{1+x} dx$

s24 Resuelve:

a) $\int \frac{1}{1 + e^x} dx$

• En el numerador, suma y resta e^x .

b) $\int \frac{x + 3}{\sqrt{9 - x^2}} dx$

• Descomponla en suma de otras dos.

25 Resuelve por sustitución:

a) $\int x\sqrt{x+1} dx$

b) $\int \frac{dx}{x - \sqrt[4]{x}}$

c) $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$

d) $\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}} dx$

e) $\int \frac{1}{x + \sqrt{x}} dx$

f) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx$

• a), c), d) Haz $x + 1 = t^2$. b) Haz $x = t^4$. e), f) Haz $x = t^2$.

26 Resuelve, utilizando un cambio de variable, estas integrales:

a) $\int \sqrt{1-x^2} \, dx$

b) $\int \frac{dx}{e^{2x} - 3e^x}$

c) $\int \frac{e^{3x} - e^x}{e^{2x} + 1} \, dx$

d) $\int \frac{1}{1 + \sqrt{x}} \, dx$

• a) Haz $x = \text{sen } t$.

s27 Encuentra la primitiva de $f(x) = \frac{1}{1+3x}$ que se anula para $x = 0$.

28 Halla la función F para la que $F'(x) = \frac{1}{x^2}$ y $F(1) = 2$.

29 De todas las primitivas de la función $y = 4x - 6$, ¿cuál de ellas toma el valor 4 para $x = 1$?

30 Halla $f(x)$ sabiendo que $f''(x) = 6x$, $f'(0) = 1$ y $f(2) = 5$.

31 Resuelve las siguientes integrales por sustitución:

a) $\int \frac{e^x}{1-\sqrt{e^x}} dx$

b) $\int \sqrt{e^x - 1} dx$

• a) Haz $\sqrt{e^x} = t$. b) Haz $\sqrt{e^x - 1} = t$.

32 Calcula $\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1 + \cos x} dx$.

• Multiplica el numerador y el denominador por $1 - \cos x$.

33 En el ejercicio resuelto de la página 344, se ha calculado la integral $\int \cos^2 x dx$ de dos formas:

— Aplicando fórmulas trigonométricas.

— Integrando por partes.

Utiliza estos dos métodos para resolver:

$$\int \operatorname{sen}^2 x dx$$

s34 Encuentra una primitiva de la función $f(x) = x^2 \operatorname{sen} x$ cuyo valor para $x = \pi$ sea 4.

s35 Determina la función $f(x)$ sabiendo que:

$$f''(x) = x \ln x, f'(1) = 0 \text{ y } f(e) = \frac{e}{4}$$

f'

f'

s36 Calcula la expresión de una función $f(x)$ tal que $f'(x) = x e^{-x^2}$ y que $f(0) = \frac{1}{2}$.

s37 De una función $y = f(x)$, $x > -1$ sabemos que tiene por derivada $y' = \frac{a}{1+x}$ donde a es una constante. Determina la función si, además, sabemos que $f(0) = 1$ y $f(1) = -1$.

- s38** Dada la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \ln(1 + x^2)$, halla la primitiva de f cuya gráfica pasa por el origen de coordenadas.

$$\int \ln(1 + x^2) dx$$

- s39** Calcula a para que una primitiva de la función $\int (ax^2 + x \cos x + 1) dx$ pase por $(\pi, -1)$.

s40 Halla $\int e^{ax}(x^2 + bx + c) dx$ en función de los parámetros a , b y c .

s41 Encuentra la función derivable $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ que cumple $f(1) = -1$ y

$$f'(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ e^x - 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

s42 De una función derivable se sabe que pasa por el punto $A(-1, -4)$ y que su

derivada es: $f'(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{si } x \leq 1 \\ 1/x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) Halla la expresión de $f(x)$.

b) Obtén la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = 2$.

s43 Calcula:

a) $\int |1 - x| dx$

c) $\int |2x - 1| dx$

b) $\int (3 + |x|) dx$

d) $\int \left| \frac{x}{2} - 2 \right| dx$

44 Calcula $\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x} dx$.

• Utiliza la igualdad $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.

45 Calcula $\int \cos^4 x dx$ utilizando la expresión:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{2}$$

46 Resuelve:

a) $\int \sqrt{4 - x^2} dx$

b) $\int \sqrt{9 - 4x^2} dx$

• a) Haz $x = 2 \operatorname{sen} t$. b) Haz $x = 3/2 \operatorname{sen} t$.

- 47** Halla una primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = 2x$ tal que $F(x) \leq 0$ en el intervalo $[-2, 2]$.

- 48** Busca una primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = 2x - 4$ que verifique $F(x) \geq 0$ en el intervalo $[0, 4]$.

- 49** Halla $f(x)$ sabiendo que:

$$f''(x) = \cos \frac{x}{2}, \quad f'(2\pi) = 0 \quad \text{y} \quad f(0) = 1$$

- 50** a) Halla la familia de curvas en las que la pendiente de las rectas tangentes a dichas curvas en cualquiera de sus puntos viene dada por la función:

$$f(x) = \frac{x - 2}{2x + 4}$$

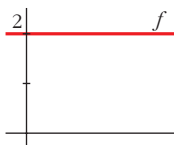
- b) Determina, de esa familia, la curva que pasa por el punto $A\left(-\frac{5}{2}, \frac{3}{4}\right)$.

- 51** Calcula la función $f(x)$ sabiendo que $f''(x) = x$, que la gráfica de f pasa por el punto $P(1, 1)$ y que la tangente en P es paralela a la recta de ecuación $3x + 3y - 1 = 0$.

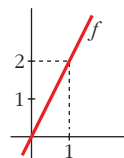
CUESTIONES TEÓRICAS

- 52** Prueba que si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ y C un número real cualquiera, la función $F(x) + C$ es también una primitiva de $f(x)$.

- 53** a) Representa tres primitivas de la función f cuya gráfica es la siguiente:



- b) Representa tres primitivas de la siguiente función:



54 Sabes que una primitiva de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ es $F(x) = \ln |x|$. ¿Por qué se toma el valor absoluto de x ?

55 En una integral hacemos el cambio de variable $e^x = t$. ¿Cuál es la expresión de dx en función de t ?

56 Comprueba que $\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| + k$

57 Comprueba que $\int \frac{1}{\operatorname{sen} x \cos x} dx = \ln |\operatorname{tg} x| + k$

58 Sin utilizar cálculo de derivadas, prueba que:

$$F(x) = \frac{1}{1+x^4} \quad \text{y} \quad G(x) = \frac{-x^4}{1+x^4}$$

son dos primitivas de una misma función.

59 Sean f y g dos funciones continuas y derivables que se diferencian en una constante.

¿Podemos asegurar que f y g tienen una misma primitiva?

60 Calcula $f(x)$ sabiendo que:

$$\int f(x) dx = \ln \frac{|x-1|^3}{(x+2)^2} + c$$

61 Las integrales:

$$\int \frac{(\operatorname{arc} \operatorname{tg} x)^2}{1+x^2} dx \text{ y } \int (\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^5 x) dx$$

¿son del tipo $\int f(x)^n f'(x) dx$?

En caso afirmativo, identifica, en cada una de ellas, $f(x)$, n y $f'(x)$.

PARA PROFUNDIZAR

62 Para integrar una función cuyo denominador es un polinomio de segundo grado sin raíces reales, distinguiremos dos casos:

a) Si el numerador es constante, transformamos el denominador para obtener un binomio al cuadrado. La solución será un arco tangente:

$$\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5} = \int \frac{dx}{(x+2)^2 + 1}$$

(Completa la resolución).

b) Si el numerador es de primer grado, se descompone en un logaritmo neperiano y un arco tangente:

$$\begin{aligned}\int \frac{(x+5)dx}{x^2+2x+3} &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+10}{x^2+2x+3} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{x^2+2x+3} dx + \frac{1}{2} \int \frac{8}{x^2+2x+3} dx\end{aligned}$$

(Completa su resolución).

63 Observa cómo se resuelve esta integral:

$$I = \int \frac{x+1}{x^3+2x^2+3x} dx$$

$$x^3+2x^2+3x = x(x^2+2x+3)$$

La fracción se descompone así: $\frac{x+1}{x^3+2x^2+3x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+3}$

Obtenemos: $A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{1}{3}$, $C = \frac{1}{3}$

Sustituimos: $I = \frac{1}{3} \int \frac{1}{x} dx - \frac{1}{3} \int \frac{x-1}{x^2+2x+3} dx$

(Completa su resolución).

64 Resuelve las siguientes integrales:

a) $\int \frac{2x-1}{x^3+x} dx$

b) $\int \frac{1}{x^3+1} dx$

c) $\int \frac{x^2+3x+8}{x^2+9} dx$

d) $\int \frac{2x+10}{x^2+x+1} dx$

e) $\int \frac{2}{x^2+3x+4} dx$

f) $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)}$

• e) *Multiplica el numerador y el denominador por 4.*

- 65** Se llama ecuación diferencial de primer orden a una ecuación en la que, además de x e y , figura también y' . Resolverla es buscar una función $y = f(x)$ que verifique la ecuación.

Por ejemplo, resolvamos $x y^2 + y' = 0$:

$$y' = -x y^2 \rightarrow \frac{dy}{dx} = -x y^2 \rightarrow dy = -x y^2 dx$$

Separamos las variables:

$$\frac{dy}{y^2} = -x dx \rightarrow \int \frac{dy}{y^2} = \int (-x) dx$$

$$-\frac{1}{y} = -\frac{x^2}{2} + k \rightarrow y = \frac{2}{x^2 - 2k}$$

Hay infinitas soluciones. Busca la que pasa por el punto $(0, 2)$ y comprueba que la curva que obtienes verifica la ecuación propuesta.

- 66** Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales de primer orden:

a) $y y' - x = 0$

b) $y^2 y' - x^2 = 1$

c) $y' - x y = 0$

d) $y' \sqrt{x} - y = 0$

e) $y' e^y + 1 = e^x$

f) $x^2 y' + y^2 + 1 = e^x$

• En todas ellas, al despejar y' se obtiene en el segundo miembro el producto o el cociente de dos funciones, cada una de ellas con una sola variable.

AUTOEVALUACIÓN

Resuelve las integrales siguientes:

1. $\int (\cos x + \operatorname{tg} x) dx$

2. $\int \left(\frac{2}{x} + \frac{x}{\sqrt{x}} \right) dx$

3. $\int x \sqrt[3]{2x^2 + 1} dx$

4. $\int \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x} dx$

5. $\int x \operatorname{arc} \operatorname{tg} x dx$

6. $\int \frac{1}{x} \operatorname{sen}(\ln x) dx$

7. $\int \frac{x}{x^2 + 4x - 21} dx$

8. $\int \frac{1}{3x^2 + 4} dx$

9. Resuelve, por el método de sustitución, la integral: $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}} dx$

10. Aplica la integración por partes para calcular $\int \cos(\ln x) dx$.

11. De la función $f(x)$, se sabe que:

$$f'(x) = \frac{3}{(x+1)^2}; f(2) = 0$$

- a) Determina f .
- b) Halla la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(0, 1)$.

12. De una función f derivable en \mathbb{R} , sabemos que:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 0 \\ -1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Halla f sabiendo que $f(1) = 2$.

13. ¿Cuáles de los siguientes apartados representan la gráfica de una función $f(x)$ y la de una de sus primitivas $F(x)$?

Justifica tu respuesta.

